

# Hermann Günther Grassmann e la formalizzazione della colorimetria

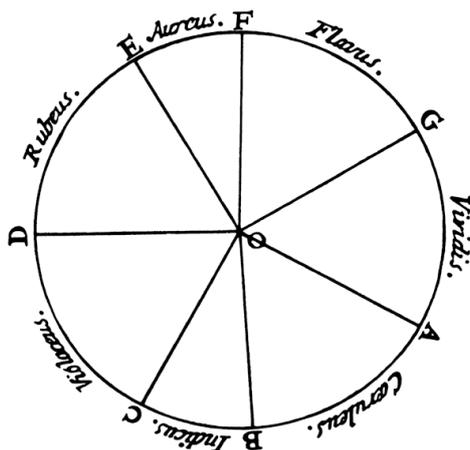
MAURO BOSCAROL

Consulente per l'informatica e l'editoria  
Via Berengario 28 – 41012 Carpi  
[mauro@boscarol.com](mailto:mauro@boscarol.com)

## 1. L'idea iniziale di Newton: il cerchio cromatico e la regola del baricentro

Nell'*Opticks* Isaac Newton (1643-1727 secondo il calendario gregoriano) aveva pubblicato le principali idee sulle quali egli basava un modello matematico di classificazione delle percezioni di colore: si trattava di un cerchio, da allora detto *cerchio cromatico di Newton*.

Ogni punto del cerchio rappresenta un colore. Sulla circonferenza del cerchio sono disposti i colori spettrali, da rosso a violetto mentre tutti i colori all'interno del cerchio sono ottenuti per mescolanza di spettrali. Nel centro c'è il bianco, e su ogni raggio che unisce il centro con un colore spettrale sono posti i vari gradi di saturazione di tale colore, dal bianco (saturazione nulla) al colore spettrale stesso (saturazione massima).



**Fig. 1** - Il cerchio cromatico di Newton con i nomi latini dei colori (*rubeus* = rosso, *aureus* = arancio, *flavus* = giallo, *viridis* = verde, *cæruleus* = azzurro, *indicus* = indaco, *violaceus* = violetto).

Nel modello di Newton le diverse mescolanze di due colori in varie proporzioni relative stanno sul segmento retto che li unisce. In particolare, se si mescola una intensità  $a$  di colore A con una intensità  $b$  di colore B il risultato sarà una intensità

$a+b$  del colore M rappresentato dal punto che sta sul segmento AB in modo tale che AM stia a MB come  $b$  sta ad  $a$ . Se si considerano le intensità di colore come pesi, quella appena indicata è la regola di *costruzione del baricentro*.

Il cerchio cromatico di Newton è un modello bidimensionale in quanto specifica esplicitamente solo la parte cromatica del colore (cioè la tinta e la saturazione), ma Newton sapeva bene che un modello bidimensionale non era sufficiente ed infatti usava l'intensità (cioè la parte non cromatica) come terza dimensione implicita.

Newton stesso era conscio del fatto che il suo modello avrebbe dovuto essere perfezionato e precisato nei dettagli, e che la regola del baricentro fosse abbastanza rigorosa "per la pratica, sebbene non matematicamente rigorosa"<sup>1</sup>.

Newton insomma aveva indicato i principi della scienza della misura dei colori, e, come scriveva in una lettera a Henry Oldenburg, segretario della Royal Society, l'11 luglio 1672,

se quei principi sono tali che a partire da essi un matematico può determinare tutti i fenomeni dei colori che possono essere causati dalla rifrazione [...] io suppongo che la scienza dei colori sarà ammessa matematicamente.

A questo punto era necessario costruire una teoria, la teoria della misura dei colori, formalizzando quei principi e traendone le necessarie deduzioni. Dovettero tuttavia passare più di 150 anni prima che sulle fondamenta gettate da Newton, un matematico tedesco, Hermann Grassmann, iniziasse a costruire le mura maestre della scienza della misura dei colori.

## 2. I postulati di Grassmann

Hermann Günther Grassmann (1809-1877), professore di matematica in un ginnasio di Stettin (che alla sua nascita era in Prussia, alla sua morte in Germania, oggi in Polonia con il nome di Szczecin) pubblicò il suo celebre articolo "Über die Theorie der Farbmischung" (Sulla teoria della mescolanza dei colori, [1]) nel 1853.

Questo articolo, l'unico articolo di Grassmann sul colore, ha avuto grande influenza su tutti gli studi successivi sul colore. L'occasione per la sua stesura fu offerta a Grassmann da un precedente articolo di Hermann von Helmholtz nel quale l'autore, impegnato nella ricerca di coppie di colori la cui mescolanza desse il bianco (colori complementari), affermava di essere riuscito a trovare solo la coppia di complementari giallo e indaco. Helmholtz avanzava allora l'ipotesi che per produrre il bianco fossero necessari almeno tre colori spettrali.

Nel suo articolo<sup>2</sup> Grassmann si propone di dimostrare all'interno di una teoria che

---

<sup>1</sup> Ottica, Libro primo, parte II, proposizione VI, problema II.

<sup>2</sup> È di interesse storico il fatto che Grassmann aveva anticipato la sua teoria sulla mescolanza dei colori già nell'ottobre 1852, in una conferenza alla *Physikalischen Gesellschaft zu Stettin* (Società di fisica di Stettino) [6].

il modello di Newton, al contrario, implica un numero infinito di coppie di colori complementari.

Per dimostrare rigorosamente questa affermazione, Grassmann formula quattro postulati, cioè quattro leggi che riassumono l'esperienza di un osservatore impegnato nello studio della mescolanza additiva dei colori. Queste leggi sono il fondamento teorico sul quale si può costruire rigorosamente (cioè matematicamente) la teoria dei colori ed esprimono le proprietà del metamerismo in connessione con la mescolanza additiva.

Per fondare la teoria Grassmann propone di considerare come termini primitivi gli attributi (psicologici) del colore:

- tinta (rosso, giallo, verde, blu, ...);
- brillantezza<sup>3</sup> del colore;
- brillantezza del bianco (cioè la brillantezza della componente di bianco del colore).

Grassmann introduce anche i due termini derivati di

- brillantezza totale = brillantezza del colore + brillantezza del bianco;
- saturazione = brillantezza del colore / brillantezza totale.

Definiti questi termini, Grassmann propone di postulare quanto segue.

1. Una sensazione di colore è completamente specificata da tre grandezze: la tinta, la brillantezza del colore e la brillantezza del bianco.
2. Se una luce varia con continuità, anche la sensazione di colore della mescolanza additiva con una seconda luce fissata varia con continuità.
3. Il risultato di una mescolanza additiva di colori dipende solo dal loro aspetto e non dalla loro composizione fisica.
4. L'intensità<sup>4</sup> totale di una mescolanza additiva di colori è la somma delle intensità totali dei colori mescolati.

Le leggi di Grassmann, come da allora vengono chiamati i postulati, sono affermazioni evidenti che costituiscono la base dalla quale far discendere deduttivamente le altre affermazioni della colorimetria. Discutiamo ora brevemente il significato dei quattro postulati, la loro plausibilità sperimentale e il loro ruolo in colorimetria.

---

<sup>3</sup> Grassmann utilizza *Intensität* (intensità), ma brillantezza (*brightness* in inglese) è il termine moderno per il concetto a cui Grassmann si riferisce in tutto il lavoro (a parte la quarta legge).

<sup>4</sup> Anche in questa occasione Grassmann usa il termine *Intensität*, ma in questo caso, come fa notare MacAdam [7], la traduzione corretta sarebbe *luminanza* (e non brillantezza) che tuttavia farebbe diventare la quarta legge una tautologia.

### 3. La prima legge

Una sensazione di colore è completamente specificata da tre grandezze: la tinta, la brillantezza del colore e la brillantezza del bianco.

Questo postulato afferma che per definire una sensazione di colore è necessario e sufficiente specificare tre grandezze indipendenti. Già Newton aveva stabilito che ogni colore (spettrale e non) poteva essere specificato come mescolanza di una certa quantità di colore spettrale con una certa quantità di bianco. Le tre grandezze che specificano un colore qualunque sono dunque, sia per Newton che per Grassmann, la *tinta*, cioè l'unico colore spettrale che mescolato con il bianco dà il colore in questione, la *brillantezza del colore* e la *brillantezza del bianco*.

Grassmann descrive anche un apparecchio sperimentale mediante il quale è possibile misurare queste tre grandezze e presenta questa primo postulato come evidente sperimentalmente in quanto

finora nessun osservatore ha permesso di dare un altro elemento che determini la sensazione di colore, e il linguaggio stesso nel descrivere una sensazione di colore, conosce solo questi tre elementi.

Le diverse tinte costituiscono una serie circolare che comprende i colori dello spettro specificabili mediante la loro rifrattività (come faceva Newton) o con la lunghezza d'onda (come potrebbe fare Grassmann, che però si riferisce alle linee di Fraunhofer).

Su questo punto Grassmann commette un errore, che tuttavia non invalida la sua teoria. Egli infatti giudica uguali la tinte dell'estremo rosso e dell'estremo violetto dello spettro, più o meno come faceva Newton, e chiama "viola"<sup>5</sup> questa tinta, che permette di chiudere a cerchio lo spettro.

In realtà, come mostrerà Helmholtz, i due estremi dello spettro (rosso e violetto) non hanno la stessa tinta, e nessuna delle due è viola. È invece vero che mescolando additivamente rosso e violetto si ottengono diverse gradazioni di viola. Questo errore farà trarre a Grassmann conclusioni errate a proposito dei colori complementari.

In questo primo postulato Grassmann introduce quella che oggi si chiama la *dimensione* dello spazio dei colori introducendo tre grandezze indipendenti. La questione della dimensione e dell'indipendenza era contenuta nei fondamenti stessi della principale opera di Grassmann, la *Ausdehnungslehre* che qui Grassmann ha occasione di verificare con un concreto esempio della cose della natura.

Grassmann afferma, presentando una base specifica, che la dimensione dello spazio dei colori è tre. La base è costituita da tinta, intensità del colore, intensità del bianco. Come sarà chiarito successivamente, la base potrà anche essere costituita da un'altra terna, per esempio le quantità di tre colori indipendenti (i mitici colori *primari*, inseguiti fin dal Settecento).

---

<sup>5</sup> *Purpur* nell'originale tedesco.

#### 4. La seconda legge

Se una luce varia con continuità, anche la sensazione di colore della mescolanza additiva con una seconda luce fissata varia con continuità.

Per Grassmann una tinta varia con continuità quando varia con continuità la lunghezza d'onda, ed inoltre, arrivati alla massima lunghezza d'onda (rosso) si passa alla minima (violetto) e viceversa (attraverso il viola). Il passaggio da violetto a rosso attraverso il viola, per l'occhio, è continuo come per un'altra coppia qualunque di colori vicini

anche se ancora le osservazioni non hanno permesso stabilire il confine al quale a diverse lunghezze d'onda corrisponde la stessa sensazione di colore.

Una sensazione di colore varia con continuità quando variano con continuità la brillantezza del colore, la brillantezza del bianco e, se la brillantezza del colore non è nulla, anche la tinta. Se la brillantezza del colore è nulla, cioè se la variazione avviene attraverso il bianco, una tinta può trasformarsi con continuità in un'altra di lunghezza d'onda completamente diversa.

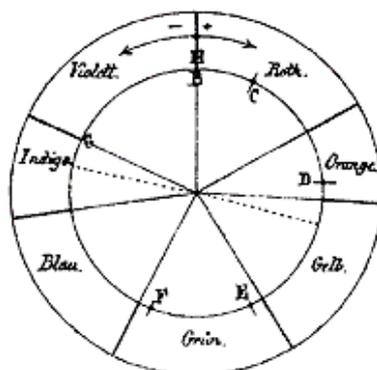


Fig. 2 – Illustrazione originale della seconda legge di Grassmann

Per Grassmann

anche questo secondo postulato è confermato dall'esperienza in quanto un salto finora non è stato notato da nessuno.

Sul tema della continuità Grassmann si stacca nettamente dalla descrizione di Newton, che aveva invece privilegiato una divisione discreta dello spettro in sette colori principali. Grassmann invece assume questa condizione di continuità in modo così rigoroso da supporre che il violetto ha lo stesso aspetto del rosso estremo, in modo tale che il cerchio è definitivamente chiuso. Come già detto, la formulazione va corretta introducendo una serie di colori tra il rosso ed il violetto,

non esclusivamente un colore, il viola, ma una serie di viola. Con questa modifica l'esperienza conferma questo postulato: non sono mai stati osservati bruschi mutamenti di colore al variare continuo della luce che ne produce la sensazione.

## 5. La terza legge

Il risultato di una mescolanza additiva di colori dipende solo dal loro aspetto e non dalla loro composizione fisica.

Il terzo postulato è di grande importanza perché permette di astrarre dalle caratteristiche fisiche della luce e di parlare semplicemente di colori. Esso ha permesso a Grassmann di interpretare i colori come vettori e la mescolanza di due colori come somma di due vettori.

Era già noto a Newton che due colori che appaiono uguali possono avere caratteristiche spettrali diverse. Per esempio, il colore M può essere formato dalla mescolanza di A e B oppure dalla mescolanza di C e D. Nel primo caso la caratteristica spettrale di M è la somma delle caratteristiche spettrali di A e B, nel secondo caso di C e D. Due colori che appaiono uguali ma hanno caratteristiche spettrali diverse si dicono colori *metameri*.

Ci si può chiedere se due colori metameri, cioè due colori visivamente uguali ma fisicamente diversi, mescolati con un terzo colore, diano come risultato due colori uguali, o se al contrario il risultato della mescolanza dipenda anche dalle caratteristiche fisiche. La risposta che fornisce l'esperienza è che il risultato di una mescolanza di colori è indipendente dalle loro caratteristiche spettrali, e dipende solo dal loro aspetto.

## 6. La quarta legge

L'intensità luminosa totale di una mescolanza additiva di colori è la somma delle intensità luminose dei colori mescolati.

Cioè l'intensità luminosa di una mescolanza è additiva. E infatti questo quarto postulato è noto anche come "additività delle luminosità" e come *legge di Abney*. Oggi si sa che questa affermazione è vera solo in casi particolari e Grassmann stesso notava che

questa legge non è così ben fondata come le precedenti ma da osservazioni teoriche sembra la più probabile.

Su suggerimento di Helmholtz, questa affermazione viene trattata per definire la *luminanza*, cioè la grandezza fotometrica corrispondente alla grandezza radiometrica detta radianza.

Come nota MacAdam [7] il termine intensità qui è "appropriato solo per sorgenti puntiformi e non per aree estese di colore di cui Grassmann sta discutendo".



punto e un peso nel cerchio cromatico. La direzione nella quale questo punto C esce dal centro indica la tinta, il peso del punto l'intensità totale della luce. Il prodotto dell'intensità totale per la distanza dal centro è l'intensità del colore. Il prodotto dell'intensità totale per la distanza dalla periferia è l'intensità del bianco. Se si definisce la *saturatione* come l'intensità del colore diviso l'intensità della luce, tale saturazione è semplicemente rappresentata dalla distanza dal centro.

La conclusione di Grassmann è che dalle sue quattro leggi, ognuna ampiamente confermata dall'esperienza, si deducono risultati che sono in accordo con la regola empirica di Newton, e che tale deduzione è stata fatta "in modo puramente matematico".

Tuttavia, secondo Grassmann, il modo in cui Newton distribuisce i colori omogenei sulla circonferenza del suo cerchio necessita di una totale revisione. Questa revisione sarà intrapresa da Helmholtz e dai suoi allievi e porterà nel 1931 alla definizione del diagramma delle cromaticità come lo conosciamo oggi.

## 9. La versione moderna delle leggi di Grassmann

I primi riflessi delle leggi di Grassmann si trovano in Helmholtz e Maxwell. Helmholtz le utilizza e ne dà una propria versione nel suo *Manuale di ottica fisiologica* [13] mentre Maxwell, le utilizza per iniziare a misurare il luogo dei colori spettrali, un obiettivo indicato da Grassmann stesso nel suo articolo. König e Dieterici hanno successivamente perfezionato il lavoro di Maxwell e la loro determinazione dei colori spettrali è stata il punto di partenza per tutte le ricerche in questo campo [9].

Da allora in letteratura si trovano differenti formulazioni delle leggi di Grassmann [9]. Tra questa, quella di Erwin Schrödinger, di Manfred Richter, di P. J. Bouma. Una esposizione matematica formale è stata data da Krantz [12]. Indicata con il segno "=" la corrispondenza metamERICA tra stimoli di colore, con il segno "+" la mescolanza additiva tra stimoli di colore e dati gli stimoli di colore A, B, C e D, valgono le seguenti proprietà:

- simmetria                      se  $A = B$  allora  $B = A$
- transitività                    se  $A = B$  e  $B = C$  allora  $A = C$
- proporzionalità                se  $A = B$  allora  $a A = a B$  per ogni reale  $a \neq 0$
- additività                        se  $A = B$  e  $C = D$  allora  $(A + C) = (B + D)$   
     se  $A = B$  e  $A + C = B + D$  allora  $C = D$

Le prime due proprietà (assieme alla proprietà riflessiva  $A = A$ ) definiscono una relazione di equivalenza tra gli stimoli di colore, la relazione tra stimoli metameri. I colori si possono dunque definire come classi di equivalenza di stimoli di colore che appaiono soggettivamente corrispondenti.

La terza (proporzionalità) stabilisce la compatibilità tra la variazione di intensità di uno stimolo di colore e la relazione di metamerismo, afferma cioè che il metamerismo viene conservato da una variazione di intensità.

Analogamente la quarta proprietà (additività, che deriva dalla terza legge di Grassmann) afferma che la relazione di metamerismo viene conservata quando ad ognuno di due stimoli metamericici si mescolano stimoli metamericici.

L'insieme degli stimoli di colore costituisce dunque (un cono convesso in) uno spazio vettoriale sui numeri reali, che è lo spazio di tristimolo. La prima legge di Grassmann afferma che questo spazio vettoriale è tridimensionale.

La validità in generale delle leggi di Grassmann è oggi in discussione, ed è noto che le leggi non sono esattamente vere per la visione umana in ogni situazione [14].

## 10. La personalità di Hermann Grassmann

Grassmann deve la propria popolarità non tanto al lavoro sulla mescolanza dei colori, ma soprattutto al fatto di aver fondato il calcolo vettoriale e l'algebra lineare<sup>6</sup>.

Nel 1844 Grassmann pubblica, all'età di 35 anni, il libro *Die lineale Ausdehnungslehre* (La teoria dell'estensione lineare), la sua opera principale. Per la novità dei contenuti e della particolare notazione, oltre che per la generalità e il rigore della presentazione, l'opera era di difficile lettura e non ebbe fortuna. Contribuì a questo anche il fatto che Grassmann cerca di spiegare, oltre ai risultati, anche le motivazioni delle sue ricerche. Ora, come dice Albert C. Lewis

la normale pratica matematica consisteva, e ancora ampiamente consiste, nel presentare i risultati in modo formale e di indicare le motivazioni con una nota informale, o addirittura di non indicarle

e quindi Grassmann, cercando di essere più chiaro, usa uno stile estraneo ai matematici del tempo, che infatti lo ignorano. Il libro ha scarsa diffusione e le copie rimaste presso l'editore vanno al macero.

Ma Grassmann non demorde. Riscrive completamente la sua opera (la seconda edizione appare nel 1861) omettendo completamente l'introduzione filosofica e pedagogica, e presentando i risultati con lo stile euclideo della definizione, teorema e dimostrazione. Contemporaneamente cerca esempi di applicazione della sua teoria e nel 1853 scrive a Möbius

---

<sup>6</sup> Sembra una costante nella storia della scienza del colore il fatto che molti dei suoi principali protagonisti abbiano acquisito notorietà non per i loro lavori sul colore ma per i loro risultati in altri campi: Newton per il principio di gravitazione universal, Grassmann per l'algebra lineare, Helmholtz per la conservazione dell'energia, Maxwell per le equazioni del campo elettromagnetico, Schrödinger per la meccanica quantistica.

Ho recentemente scoperto una interessante applicazione del calcolo baricentrico nel campo dell'ottica ed ho presentato un articolo ai *Poggendorff's Annalen*. In esso deduco matematicamente da pochi postulati una regola per la mescolanza dei colori che Newton ha presentato nella sua *Opticks* come regola empirica adeguatamente in accordo con l'esperienza...

L'unico articolo di Grassmann sui colori era quindi legato alla possibilità di trovare esempi reali per la sua *Ausdehnungslehre*, che rimaneva il suo interesse principale e che voleva presentare come metodo geometrico per studiare le leggi della natura. La regola del baricentro, già enunciata da Newton a proposito dei colori, e già presentata da Grassmann come applicazione della sua teoria (e anche da Möbius in una forma un po' diversa), costituisce il collegamento tra i colori e la teoria di Grassmann.

C'è ancora da notare una particolare analogia tra la teoria dei colori di Newton e la teoria dell'estensione di Grassmann: ambedue furono accolte sfavorevolmente all'inizio (per Newton la *New Theory about Light and Colours*, per Grassmann la prima edizione del 1844 della *Ausdehnungslehre*); ambedue gli autori se la presero a male e decisero di riscrivere la presentazione in una seconda forma meno attaccabile (per Newton fu l'*Opticks* del 1704, per Grassmann la seconda edizione del 1861 della *Ausdehnungslehre*). Ma oltre a questo nel 1877, l'anno della sua morte, Grassmann "pensò che il mondo potesse essere pronto per la versione originale del 1844 e la fece ripubblicare".

A Grassmann, quale iniziatore dell'algebra lineare, si deve anche il concetto di dimensione (in senso moderno) di uno spazio e di dipendenza lineare, presente nella fondazione stessa della teoria dell'estensione. Questo concetto avrà un significato particolarmente importante nel corso dei successivi avvenimenti in colorimetria. Grassmann, il padre del modello matematico della visione dei colori, è ricordato dalla storia scientifica per il suo contributo all'idea di algebra lineare e spazio vettoriale.

Nel 1862, irritato per la mancanza di interesse per la sua opera matematica Grassmann si rivolge allo studio dei linguaggi e raggiunge in questo campo una notorietà che i suoi lavori matematici non gli avevano mai dati. Lo studio dei linguaggi in particolare del sanscrito, il campo in cui Grassmann ha avuto più riconoscimenti durante la sua vita. Il suo dizionario di sanscrito *Wörterbuch zum Rig-Veda* pubblicato a Lipsia nel 1873 rimane uno degli strumenti più importanti per lo studio dell'antico testo originale indiano, utilizzato ancor oggi (è in vendita online su Amazon).

## 11. Nota bibliografica

Isaac Newton pubblica nel 1704 *Opticks* di cui nei successivi anni si ebbero cinque edizioni, tre in inglese (1704, 1717, 1721) e due in latino (*Optice*, 1706, 1719).

La prima traduzione in italiano è in *Scritti di Ottica di Isaac Newton* (a cura di

Alberto Pala), Torino: Utet (1978), da cui sono tratte le citazioni.

Il lavoro originale di Grassmann sulle mescolanza dei colori (in tedesco) è [1] successivamente ampliato (sempre in tedesco) in [2]. Ambedue questi articoli sono riprodotti nella raccolta completa delle opere [3]. Il lavoro originale è stato recentemente ristampato in copia anastatica (senza i grafici) in [4].

La prima traduzione in inglese dell'articolo di Grassmann è del 1854 [5], l'anno successivo della pubblicazione dell'originale, ed è stato riprodotto con le annotazioni di F. Engel in [6] e anche, parzialmente e con le annotazioni di David L. MacAdam, in [7].

Notizie su Grassmann e i suoi lavori matematici si trovano in un articolo uscito poco dopo la sua morte [8]. In occasione del centenario della pubblicazione originale di Grassmann sui colori è apparso [9]. In occasione del 150° anniversario della pubblicazione della *Ausdehnungslehre* si è tenuto in Germania un convegno per il quale R. Steven Turner ha scritto un articolo [10] sul ruolo di Grassmann nella fondazione della colorimetria.

Per la biografia di Grassmann si veda l'articolo di Eugenio Togliatti in *Scienziati e Tecnologi dalle origini al 1875*, Mondadori 1975.

## 12. Bibliografia

1. H. Grassmann "Zur Theorie der Farbenmischung" *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie* **89** (1) 69-84 (1853)
2. H. Grassmann "Bemerkungen zur Theorie der Farbenempfindungen", in appendice a W. Preyer *Elementen der reinen Empfindungslehre* Jena: Dufft 85-93 (1877)
3. J. Lüroth e F. Engel (a cura di) *Hermann Grassmann's Gesammelte mathematische und physikalische Werke* 3 volumi, Leipzig: Teubner, (1902)
4. T. Lampert *Zur Wissenschaftstheorie der Farbenlehre* Berns Studies in the History and Philosophy of Science (2000)
5. H. Grassmann "On the Theory of Compound Colours" *Philosophical Magazine* **4** (7) 254-264 (1854)
6. H. Grassmann *A New Branch of Mathematics, The Ausdehnungslehre of 1844 and Other Works* translated by L. C. Kannenberg, Open Court Publishing Company (1995)
7. D. L. MacAdam (a cura di) *Source of Color Science*, MIT Press (1970)
8. H. Grassmann "Sein Leben und sein mathematischen Arbeiten" *Mathem. Ann.* **14** 1-45 (1879)
9. H. Frieser "Die Grassmann Gesetze" *Farbe* **2** 91-108 (1953)
10. R. Steven Turner "The Origins of Colorimetry: What Did Helmholtz and Maxwell Learn from Grassmann?" in *Hermann Gunther Grassmann (1809-1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, Gert Schubring, Ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1996)
11. C. Oleari (a cura di) *Misurare il colore* Hoepli (1998)

12. D. H. Krantz “Color measurement and color theory: I. Representation theorem for Grassmann Structures” *Journal of Mathematical Psychology*, 12 283-303 (1975)
13. H. von Helmholtz *Handbuch der physiologischen Optik*, II ed. (1896)
14. M. H. Brill *Open Problems on the Validity of Grassmann's Laws* ISCC/CIE Expert Symposium, Ottawa (2006)